

## Limitante Inferior do Makespan

Máquina 1 : caminho 1 – 4 – 7 – 10 – 11 – 12

$$LI_1 = \sum_{i=1}^n p_{i1} + \min_i \sum_{\ell=2}^3 p_{i\ell}$$

Máquina 2 : caminho 1 – 2 – 5 – 8 – 11 – 12

$$LI_2 = \sum_{i=1}^n p_{i2} + \min_i p_{i1} + \min_i p_{i3}$$

Máquina 3 : caminho 1 – 2 – 3 – 6 – 9 – 12

$$LI_3 = \sum_{i=1}^n p_{i3} + \min_i \sum_{\ell=1}^2 p_{i\ell}$$

$$LI = \max \{LI_1, LI_2, LI_3\}$$

Em geral, para m máquinas

$$LI = \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \sum_{i=1}^n p_{ij} + \min_i \sum_{\ell=1}^{j-1} p_{i\ell} + \min_i \sum_{\ell=j+1}^m p_{i\ell} \right\}$$

Para o exemplo,

$$LI_1 = 12 + \min\{12, 9, 10, 11\} = 21$$

$$LI_2 = 23 + \min\{1, 2, 6, 3\} + \min\{4, 5, 8, 2\} = 21$$

$$LI_3 = 19 + \min\{9 + 6 + 8 + 12\} = 25$$

$$LI = 26$$

Seja

$A = (i_1, i_2, \dots, i(r))$  : seqüência parcial de  $r$  tarefas alocadas

$U$  = conjunto das  $n - r$  tarefas ainda não alocadas

O limitante inferior, dada a seqüência  $A$ , é dado por

$$LI(A) = \max \{LI_1(A), LI_2(A), LI_3(A)\}$$

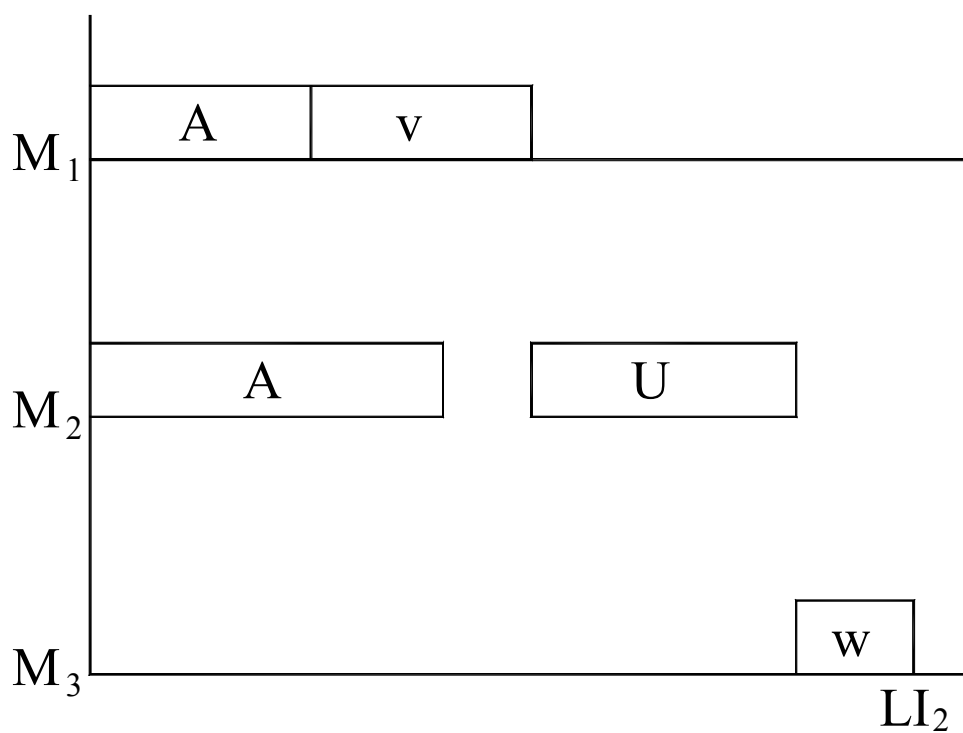
onde

$$LI_1(A) = C_1(i(r)) + \sum_{i \in U} p_{i1} + \min_{i \in U} \sum_{\ell=2}^3 p_{i\ell}$$

$$LI_2(A) = \max \left\{ C_2(i(r)), C_1(i(r)) + \min_{i \in U} p_{i1} \right\} + \sum_{i \in U} p_{i2} + \min_{i \in U} \{p_{i3}\}$$

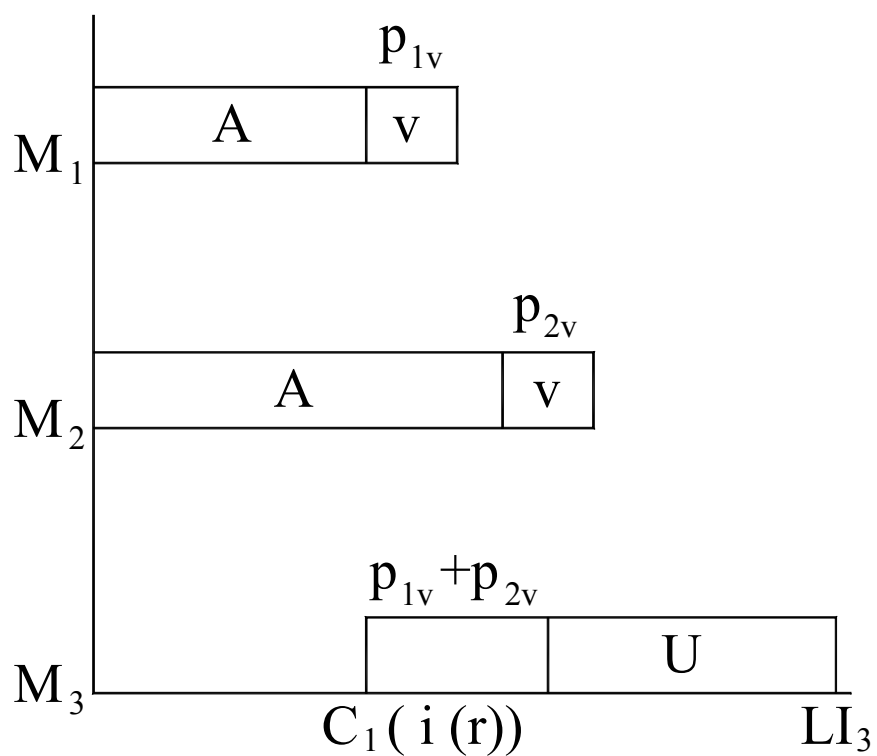
$$LI_3(A) = \max \left\{ C_3(i(r)), C_2(i(r)) + \min_{i \in U} \{p_{i2}\}, C_1(i(r)) + \min_{i \in U} \sum_{\ell=1}^2 p_{i\ell} \right\} + \sum_{i \in U} p_{i3}$$

Ilustração de  $LI_2$  quando o máximo é o 2º termo



$$p_v = \min_{i \in U} p_{i1} \quad ; \quad p_w = \min_{i \in U} p_{i3}$$

Ilustração de  $LI_3$  quando o máximo é o 3º termo



$$p_{1v} + p_{2v} = \min_{i \in U} \sum_{\ell=1}^2 p_{i\ell}$$

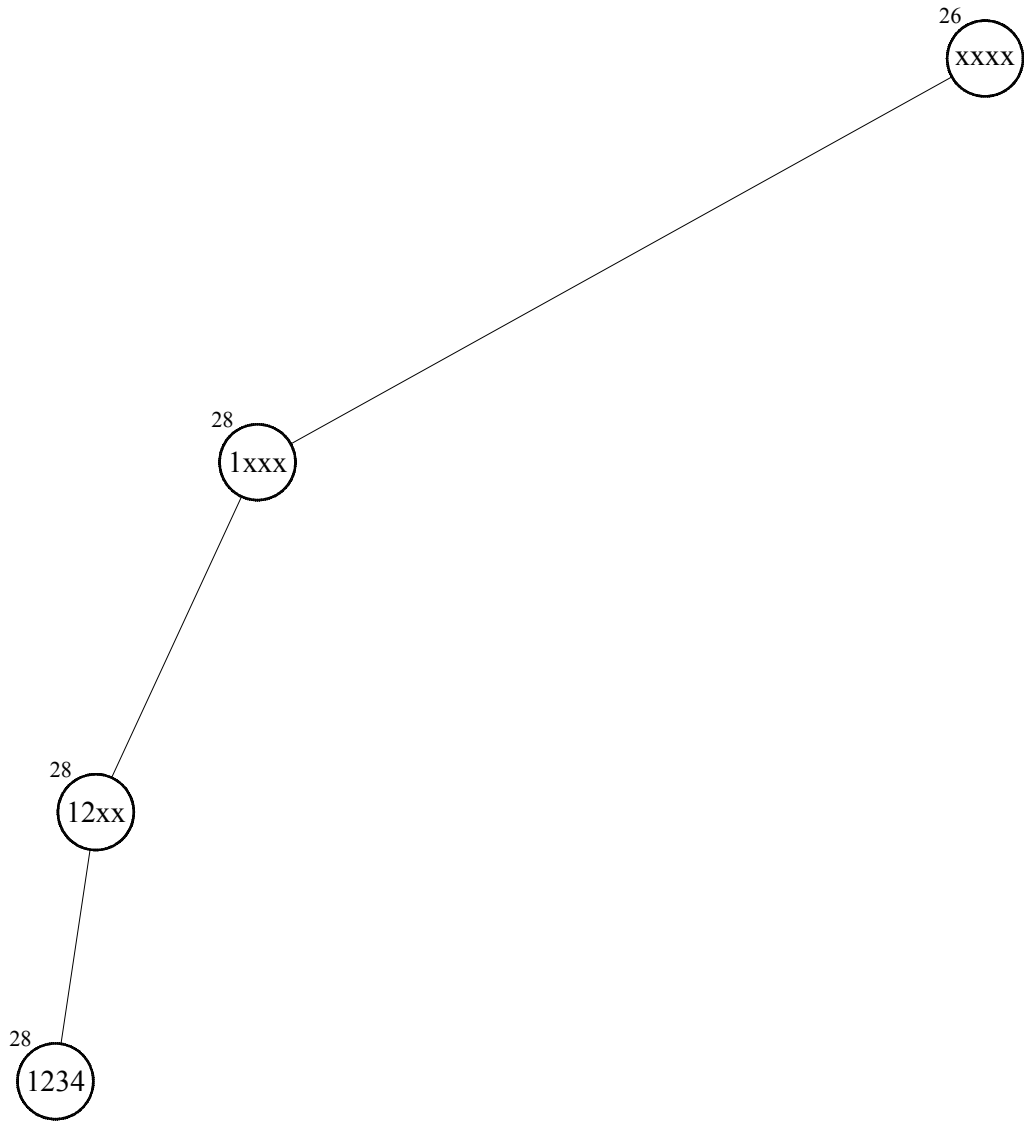
## MÉTODO BRANCH AND BOUND

É um método de busca da solução ótima que utiliza a informação do limitante inferior para explorar implicitamente todas soluções, ao contrário da enumeração completa ou explícita

O método tem uma estrutura de busca em árvore onde um nó é representada por tarefas alocadas ou fixadas (conjunto A) e tarefas não alocadas (conjunto U)

$$\underbrace{i(1), i(2), \dots, i(r)}_A, \underbrace{x, x, \dots, x}_U$$

Considere o seguinte caminho com o limitante inferior para cada nó



## Cálculo do limitante inferior em cada nó

$$\text{Nó } \text{xxxx} \quad \text{LI} = 26$$

$$\text{Nó } 1\text{xxx} \quad \text{A} = (1) \quad \text{U} = \{2, 3, 4\}$$

$$C_1(1) = 1 \quad ; \quad C_2(1) = 9 \quad ; \quad C_3(1) = 13$$

$$\text{LI}_1(\text{A}) = 1 + 11 + 9 = 21$$

$$\text{LI}_2(\text{A}) = \max\{9, 1 + 2\} + 15 + 2 = 26$$

$$\text{LI}_3(\text{A}) = \max\{13, 9 + 2, 1 + 6\} + 15 = 28$$

$$\Rightarrow \text{LI}(\text{A}) = 28$$

$$\text{Nó } 12_{xx} \quad A = (1, 2) \quad U = \{3, 4\}$$

$$C_1(2) = 3 \quad ; \quad C_2(2) = 13 \quad ; \quad C_3(2) = 18$$

$$LI_1(A) = 3 + 9 + 10 = 22$$

$$LI_2(A) = \max\{13, 3 + 3\} + 11 + 2 = 26$$

$$LI_3(A) = \max\{18, 13 + 2, 3 + 8\} + 10 = 28$$

$$\Rightarrow LI(A) = 28$$

Nó 1234 ;  $C_{\max} = 28 \Rightarrow$  solução incumbente: melhor solução encontrada até o momento

## Observações

1) Nó pai :  $A = (i(1), \dots, i(\ell))$ ,  $U =$  conjunto de  $n - \ell$  tarefas

Nó filho :  $A' = (i(1), \dots, i(\ell), i(\ell+1))$ ,

$U' =$  conjunto de  $n - \ell - 1$  tarefas

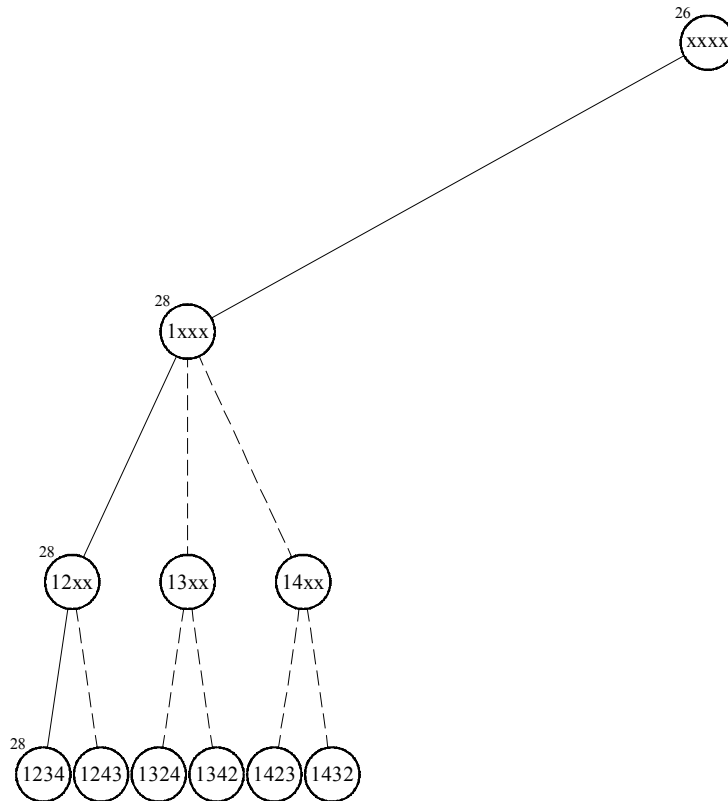
Note que

$$C_i(i(\ell + 1)) > C_i(i(\ell)) \quad i = 1, 2, 3$$

Como  $U' \subset U$ , então  $\min_{i \in U'}(\cdot) \geq \min_{i \in U}(\cdot)$

$$\Rightarrow LI(A') \geq LI(A)$$

- 2) Se para um dado nó  $k$  seu limitante inferior é maior ou igual ao valor da solução incumbente (28), então este nó e seus descendentes podem ser descartados



Todos os nós abaixo de 1xxx foram explorados

Notação : ramos tracejados indicam os nós implicitamente enumerados

## Explorando os ramos a partir de 2xxx

$$\text{Nó } 2\text{xxx} \quad A = (2) \quad U = \{1, 3, 4\}$$

$$C_1(2) = 2 \quad ; \quad C_2(2) = 6 \quad ; \quad C_3(2) = 11$$

$$LI_1(A) = 2 + 10 + 10 = 22$$

$$LI_2(A) = \max\{6, 2 + 1\} + 19 + 2 = 27$$

$$LI_3(A) = \max\{11, 6 + 2, 2 + 8\} + 14 = 25$$

$$\Rightarrow LI(A) = 27$$

$$\text{Nó } 21\text{xx} \quad A = (2, 1) \quad U = \{3, 4\}$$

$$LI(A) = 28$$

$$\text{Nó } 23\text{xx} \quad A = (2, 3) \quad U = \{1, 4\}$$

$$LI(A) = 29$$

$$\text{Nó } 24\text{xx} \quad A = (2, 4) \quad U = \{1, 3\}$$

$$LI(A) = 29$$

Explorando os ramos a partir de 3xxx

Nó 3xxx       $A = (3)$        $U = \{1, 2, 4\}$

$$LI(A) = 28$$

Explorando os ramos a partir de 4xxx

Nó 4xxx       $A = (4)$        $U = \{1, 2, 3\}$

$$LI(A) = 31$$

Nó 4xxx       $A = (4)$        $U = \{1, 2, 3\}$

$$LI(A) = 28$$

Portanto,

seqüência ótima (1, 2, 3, 4) com  $C_{\max} = 28$

