MINIMIZAÇÃO DO MAKESPAN EM UM FLOWSHOP

FÓRMULA RECURSIVA PARA O CÁLCULO DO MAKESPAN

Seja o problema $n/m/F/C_{max}$ e considere somente programas de permutação.

Seja a seqüência ou permutação de tarefas
(i(1), i(2), …, i(n))

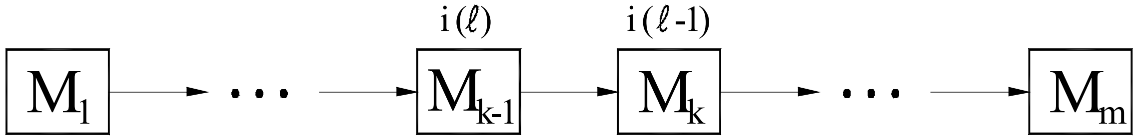
onde

$i(\ell)$ – tarefa na posição ℓ da seqüência

Defina

$C_k(i(\ell))$ = instante de término de processamento da tarefa $i(\ell)$ na máquina k, $\ell = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, m$

$p_k(i(\ell))$ = tempo de processamento da tarefa $i(\ell)$ na máquina k, $\ell = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, m$



$$C_k(i(\ell)) = \max\{C_{k-1}(i(\ell)), C_k(i(\ell-1))\} + p_{i(\ell),k} \qquad (8.1)$$

$$\ell=1,\ldots,n \; ; \; k=1,\ldots,m$$

$$C_k(i(0)) = 0 \qquad k = 1,\ldots, m$$

$$C_0(i(\ell)) = 0 \qquad \ell = 1,\ldots, n$$

A fórmula recursiva (8.1) é aplicada inicialmente para a máquina k=1 e todas as tarefas da seqüência. A seguir, para as máquinas k=2,…,m e todas as tarefas da seqüência.

Makespan = $C_m(i(n)) = C_{max}$

Exemplo

Seja o problema $4/3/F/C_{max}$

p_{ik} = tempo de processamento da tarefa i na máquina k

Tarefa	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}
1	1	8	4
2	2	4	5
3	6	2	8
4	3	9	2

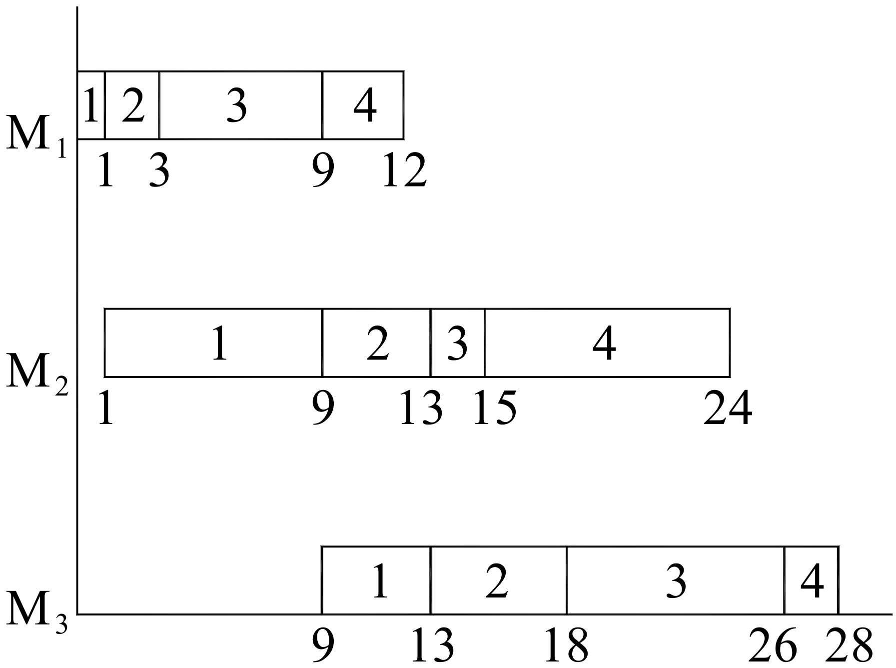
Aplicando a fórmula recursiva (8.1) para a seqüência (1,2,3,4)

Seqüência de tarefas

Instante de término nas máquinas		1	2	3	4
	C_1	1	3	9	12
	C_2	9	13	15	24
	C_3	13	18	26	28

Makespan = 28

Diagrama de Gantt para a seqüência (1, 2, 3, 4)



REPRESENTAÇÃO DO FLOWSHOP POR GRAFO DISJUNTIVO (V, C, D)

- V = conjunto de nós

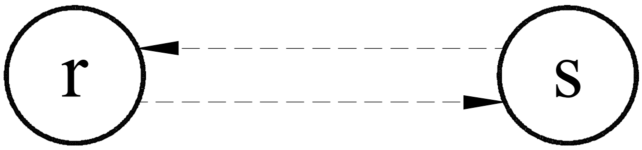
  Cada nó r $\in$ V representa uma operação, isto é, o processamento da tarefa i na máquina k. Ao nó r é associado o peso $q_r = p_{ik}$

- C $\subset$ V x V : conjunto de arcos conjuntivos

  (r, s) $\in$ C $\Leftrightarrow$ operação associada ao nó r precede imediatamente a operação associada ao nó s

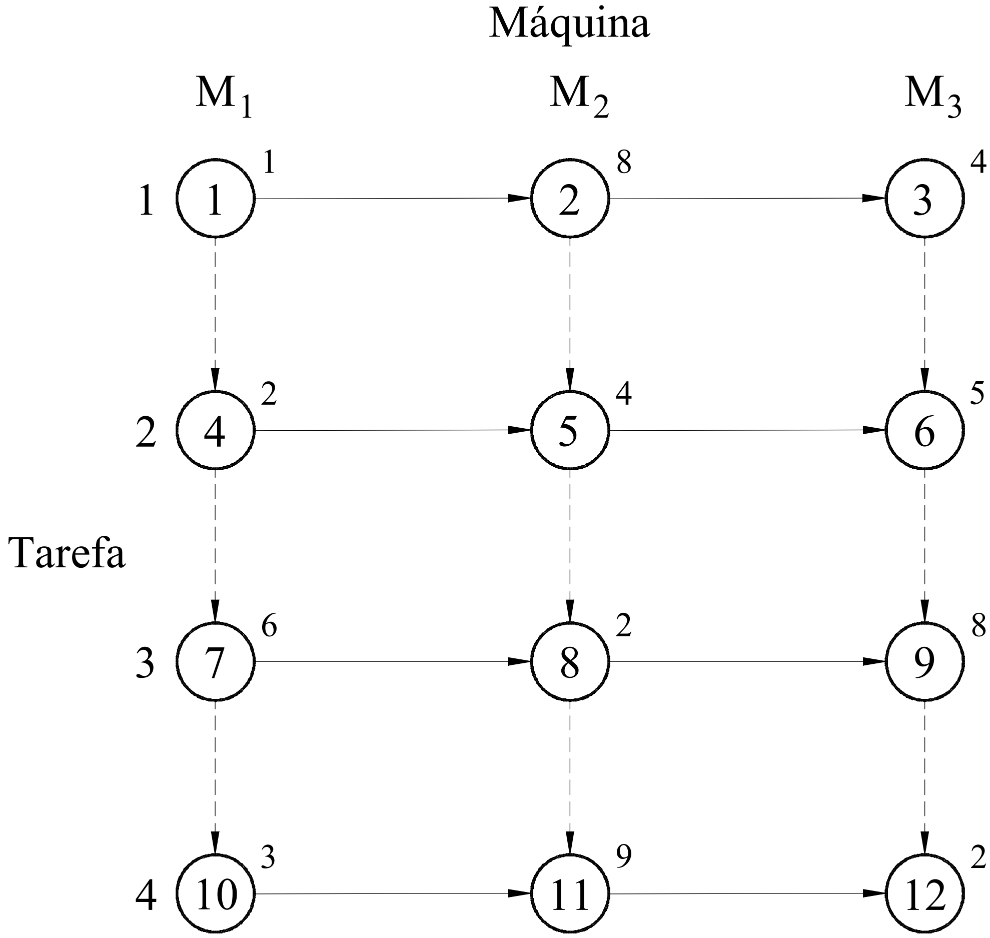
- D ⊂ V x V : conjunto de arcos disjuntivos

  Representam relações de precedência; (r, s) ou (s, r) pertence a D se para uma máquina M a operação r de uma tarefa p precede (ou sucede) imediatamente a operação s de uma tarefa q (p ≠ q)



ou

Grafo do exemplo



O makespan 28 corresponde ao comprimento do maior caminho do nó 1 ao nó 12, dado por 1 – 2 – 3 – 6 – 9 – 12.

A expressão (8.1) corresponde à equação recursiva da programação dinâmica para cálculo do caminho máximo em um grafo direcionado.

f_r = comprimento do caminho máximo do nó 1 ao nó r

Para s > r

$$f_s = \max_{r \in P(s)} \{f_r + p_s\} \qquad ; \qquad f_1 = q_1$$

onde

P(s) = nós predecessores imediatos ao nó s

$f_2 = 9$

$f_3 = 13$

$f_4 = 3$

$$f_5 = \max\begin{cases} f_2 + 4 \\ f_4 + 4 \end{cases} = 13$$

$$f_6 = \max\begin{cases} f_3 + 5 \\ f_5 + 5 \end{cases} = 18$$

$f_7 = f_4 + 6 = 9$

$$f_8 = \max\begin{cases} f_7 + 2 \\ f_5 + 2 \end{cases} = 15$$

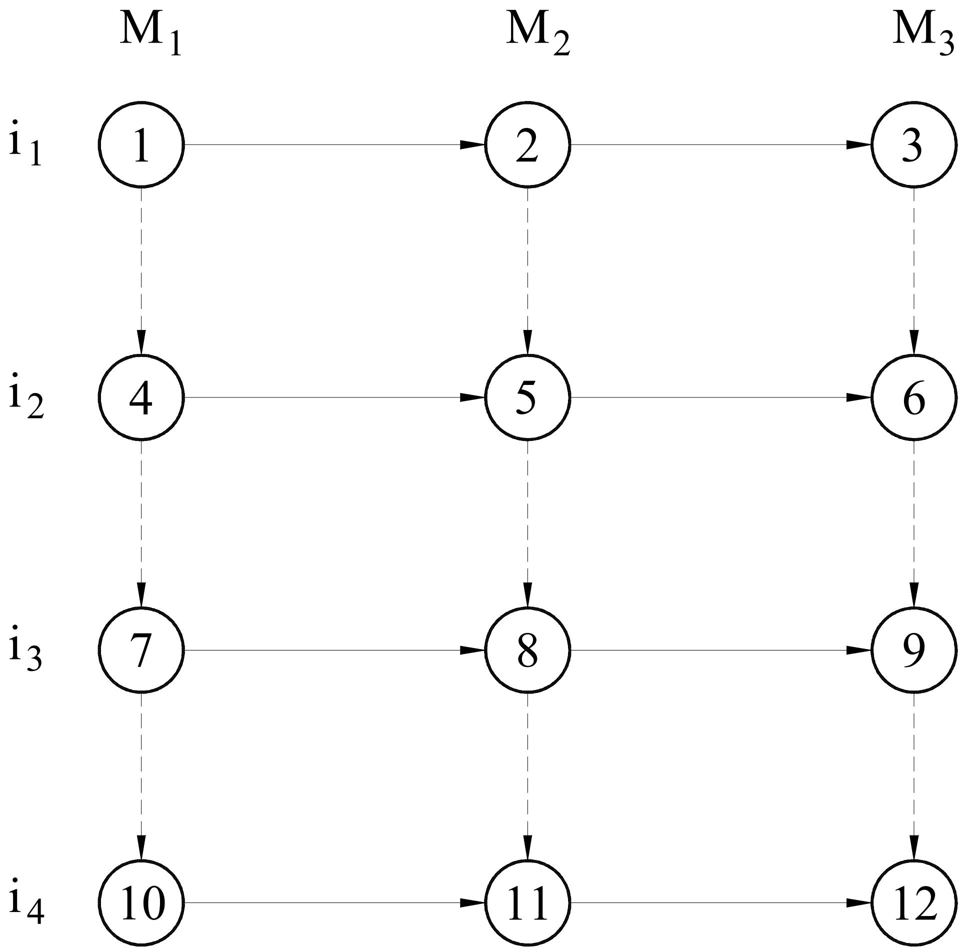
$$f_9 = \max\begin{cases} f_6 + 8 \\ f_8 + 8 \end{cases} = 26$$

$f_{10} = f_7 + 4 = 13$

$$f_{11} = \max\begin{cases} f_8 + 9 \\ f_{10} + 9 \end{cases} = 24$$

$$f_{12} = \max\begin{cases} f_9 + 2 \\ f_{11} + 2 \end{cases} = 28$$

Limitante Inferior do Makespan



Qualquer caminho do nó 1 ao nó 12 provê um limitante inferior para o makespan