

BUSCA LOCAL COM FASE DE CONSTRUÇÃO ADAPTATIVA E ALEATÓRIA BASEADA EM FUNÇÃO GULOSA

GREEDY RANDOMIZED ADAPTIVE SEARCH PROCEDURE GRASP

Thomas A. Feo

Mauricio G. C. Resende

<http://www.research.att.com/~mgcr/>

- Método de busca local com múltiplas soluções iniciais

Cada solução inicial é obtida por uma heurística construtiva com aleatoriedade controlada

Cada iteração de GRASP consiste de duas fases:

- 1) fase construtiva
- 2) fase de busca local

A melhor solução obtida é o resultado final

Seja o problema de otimização combinatória

$$\min f(x)$$

sujeito a $x \in X$

$g(\cdot)$: função gulosa que constrói uma solução factível

maxiter : número máximo de iterações GRASP

α : parâmetro que controla o grau de aleatoriedade na escolha de um elemento da solução parcial na fase construtiva

Procedimento grasp ($f(\cdot)$, $g(\cdot)$, maxiter, x^*)

$$x^* = \infty$$

para $k = 1, 2, \dots, \text{maxiter}$ faça

 construção ($g(\cdot)$, α , x);

 busca local ($f(\cdot)$, x);

 se $f(x) < f(x^*)$ faça

$$x^* = x;$$

 fim se;

 fim para

fim grasp

FASE CONTRUTIVA

Uma solução é construída iterativamente, adicionando-se um elemento por vez

Escolha do próximo elemento a ser incluído na solução:

1) ordene os elementos candidatos em uma lista de candidatos C com relação à uma função gulosa $g () : C \rightarrow R$

$g ()$: mede o benefício (míope) de selecionar cada elemento

2) escolha aleatoriamente um dos melhores candidatos an lista restrita de candidatos (LRC) determinada por $\alpha \in [0, 1]$

Pseudo – Código da Fase Construtiva

Procedimento construção ($g ()$, α , x)

$x = \emptyset$

Inicialize lista de candidatos C

Enquanto $C \neq \emptyset$ faça

$$s_1 = \min \{ g (t), t \in C \}$$

$$s_2 = \max \{ g (t), t \in C \}$$

$$LRC = \{ s \in C \mid g (s) \leq s_1 + \alpha (s_2 - s_1) \};$$

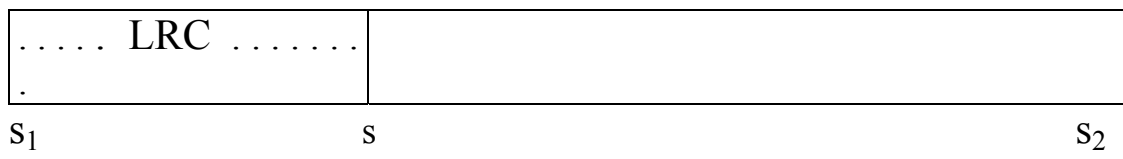
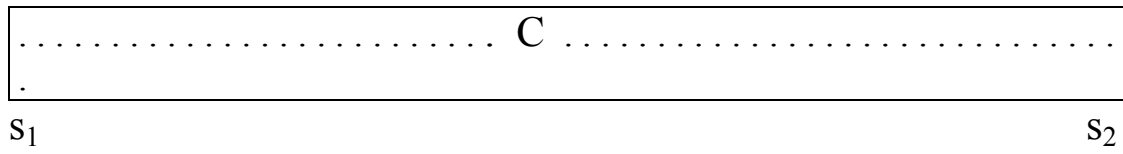
Selecione s aleatoriamente de LRC

$$x = x \cup \{ s \}$$

Atualize lista de candidatos C

fim enquanto

fim construção



$$s = s_1 + \alpha (s_2 - s_1)$$

$\alpha = 0$ construção gulosa

$\alpha = 1$ construção aleatória

Justificativa Intuitiva de GRASP

Cada iteração de GRASP produz uma solução candidata de uma distribuição desconhecida de todos os resultados que podem ser obtidos

Média e variância da distribuição dependem de $|LRC|$

Se $g(\cdot)$ é uma função efetiva, a solução gulosa ($\alpha = 0$) tem boa qualidade ($|LRC| = 1$)

Para $\alpha > 0$, $|LRC| > 1$, a média da distribuição é degradada com relação à solução gulosa e a variância aumenta \Rightarrow melhor solução da distribuição é melhor que a média e a solução gulosa

Distribuição Amostral das Soluções de GRASP para um Problema de Maximização

valor da solução ótima: 3126

valor da solução gulosa: 3124

100.000 iterações GRASP

Valores das Soluções											
LRC	3116	3117	3118	3119	3120	3121	3122	3123	3124	3125	3126
1									100000		
2							151	6053	93796		
4						75	1676	17744	80503	2	
8				1	50	750	6566	31257	61336	35	5
16				16	282	2485	13274	38329	45547	42	25
32		1	3	72	635	4196	16455	37937	40479	164	58
64		4	18	177	1213	5933	19553	37666	34832	441	163
128		4	36	269	1716	7324	21140	37186	34832	679	281
256	1	5	35	304	1980	7867	21792	36725	29027	1575	689

Figura 1. Distribuição amostral das soluções de GRASP

LRC	1	2	4	8	16	32	64	128	256
média (3120 +)	4,00	3,94	3,79	3,53	3,27	3,14	3,00	2,91	2,89

Figura 2. Média das distribuições amostrais de GRASP

Média é degradada com o aumento de |LRC|

GRASP Aplicado ao Problema de Recobrimento de Conjuntos

Dados n conjuntos finitos P_1, P_2, \dots, P_n , seja

$$I = \bigcup_{i=1}^n P_i = \{1, 2, \dots, m\}$$

e

$$J = \{1, 2, \dots, n\}$$

Um conjunto $J^* \subset J$ é uma cobertura de I se $\bigcup_{i \in J^*} P_i = I$

Problema: achar a cobertura de cardinalidade mínima

	P_1	P_2	P_3	P_4	
	•	•			1
	•		•		2
		•		•	3

Figura 3

Exemplo da Figura 3: $\alpha = 0,4$

$$P_1 = \{1, 2\} \quad P_2 = \{1, 3\} \quad P_3 = \{2\} \quad P_4 = \{3\}$$

8 coberturas: $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $\{P_1, P_2, P_3\}$, $\{P_1, P_2, P_4\}$,

$\{P_1, P_3, P_4\}$, $\{P_2, P_3, P_4\}$, $\{P_1, P_2\}$, $\{P_1, P_4\}$, $\{P_2, P_3\}$

Coberturas ótimas de tamanho 2: $\{P_1, P_2\}$, $\{P_1, P_4\}$, $\{P_2, P_3\}$

FASE CONSTRUTIVA

Escolha gulosa: selecione o conjunto P_i que cubra o maior número de elementos de I ainda não cobertos

Procedimento Construção_Cobertura ($n, P_1, P_2, \dots, P_n, \alpha, J^*$)

para $j = 1, \dots, n \rightarrow P_j^\circ = P_j$

fim para

$J^* = \emptyset$

para $P_j^\circ \neq \emptyset, j = 1, 2, \dots, n$

$\Gamma = \max \{|P_j^\circ|, j = 1, 2, \dots, n\}$

$L = \{j : |P_j^\circ| \geq \alpha \Gamma, j = 1, 2, \dots, n\};$

Selecione k aleatoriamente de L ;

$J^* = J^* \cup \{k\}$

para $j = 1, 2, \dots, n \rightarrow P_j^\circ = P_j^\circ - \{k\}$

fim para

fim para

fim Construção_Cobertura

P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	
					•			1
		•	•			•		2
•	•		•	•		•		3
•			•	•	•		•	4
				•	•			5

Figura 4

Exemplo da Figura 4

Escolhas gulosas: P₄, P₅, P₆ (cobrem 3 elementos)

$$\text{LRC} = \{P_1, P_4, P_5, P_6, P_7\}$$

Escolha aleatória: conjunto P₅; cobre elementos 3, 4, 5

P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	
					•			1
		•	•			•		2
								3
								4
								5

Figura 5. Fase construtiva

Escolha aleatória: conjunto P₃; cobre elemento 2

Escolha final; conjunto P₆

$$J^* = \{P_5, P_3, P_6\}$$

Se P_6 é escolhido em lugar de P_5 :

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	
								1
		•	•			•		2
•	•		•	•		•		3
								4
								5

Figura 6. Fase construtiva

Escolha aleatória: conjunto P_4

$J^* = \{P_4, P_6\} \rightarrow$ solução ótima

Fase Busca Local: eliminar conjuntos supérfluos

P_i é supérfluo em relação a P_j se o conjunto de elementos cobertos por P_i é um subconjunto dos elementos cobertos por P_j

4 instâncias da literatura resolvidas por GRASP

$\alpha = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$

Para cada valor de α , cada instância foi resolvida 10 vezes, variando a semente inicial do gerador de números aleatórios

GRASP encontrou as melhores soluções conhecidas na literatura

Critério de parada não especificado no artigo!