c)

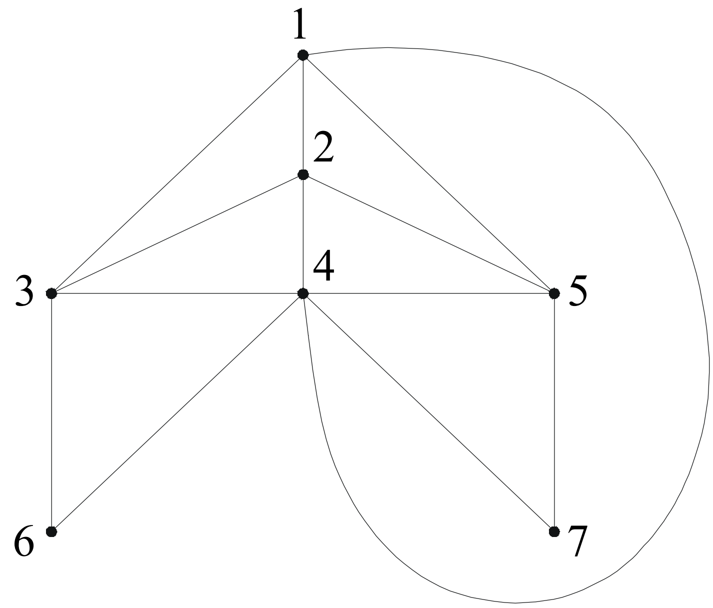


Figura 2

Ciclo Euleriano na Figura 2 :

6 – 4 – 7 – 5 – 1 – 3 – 4 – 1 – 2 – 5 – 4 – 2 – 3 – 6

Teorema 1. Um grafo G conexo possui um ciclo Euleriano se e somente se todo vértice de G possui grau par.

Demonstração

$\Rightarrow$) Seja C um ciclo Euleriano de G. Cada ocorrência de um dado nó v em C contribui com 2 unidades para o cálculo do grau de v. Como cada aresta de G aparece exatamente uma vez em C, conclui-se que v possui grau par.

Teorema 2. Seja G um grafo com m arestas e n nós $v_1, v_2, ..., v_n$. Seja $\delta(v_i)$ o grau de v_i. Então

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$$

Demonstração

Quando se soma os graus dos nós, cada aresta (v_i, v_j) é contada duas vezes: uma no grau de v_i e outra no grau de v_j.

Teorema 3. Em qualquer grafo existe um número par de vértices de grau impar.

Demonstração

Sejam $x_1, ..., x_p$ os nós com grau par e $y_1, ..., y_r$ os nós com grau impar.

$$S = \delta(x_1) + ... + \delta(x_p)$$

$$T = \delta(y_1) + ... + \delta(y_r)$$

Pelo Teorema 2, S+T é par. Como S é par, então T também é par. Como T é a soma de r números impares $\left(\sum_{i=1}^{r} (2k_i + 1), \;\; k_i \geq 0 \;\; \text{e inteiro} \right)$, segue-se que r é par.

Árvore. Um grafo G = (V, E) acíclico (sem ciclos) e conexo é chamado árvore.

Teorema 4. Seja G um grafo com n nós. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) G é uma árvore

ii) Existe um único caminho entre cada par de nós em G

iii) G contém n-1 arestas e é conexo

iv) G contém n-1 arestas e é acíclico

Nota : árvores são grafos conexos com o menor número de arestas.

Subgrafo

Seja G = (V, E) um grafo. (V', E') é um subgrafo de G se

i) $V' \subset V$ e $E' \subset E$

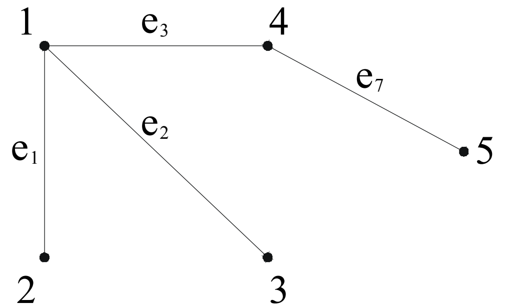
ii) para cada aresta $e' \in E'$ e se e' é incidente em v' e w', então v' e $w' \in V'$

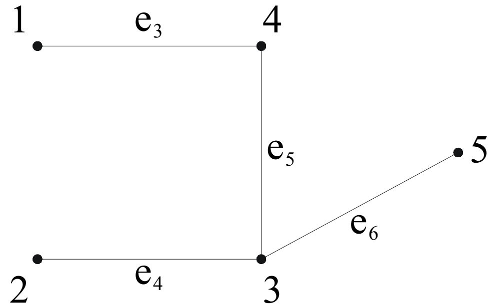
- Árvore Varredora

Uma árvore T é uma árvore varredora de um grafo G se T é um subgrafo de G que contém todos os nós de G.

Exemplo

Árvores varredoras da Figura 1.





Problema da Árvore Varredora de Peso Mínimo

Seja um grafo conexo G = (V, E) e seja w_e o peso de cada aresta $e \in E$. Construa uma árvore varredora T de G com soma dos pesos $\sum_{e \in T} w_e$ mínimo.

Algoritmo de Kruskal

Passo 1. Ordene as arestas $e_1, ..., e_m$ tal que $w(e_1) \leq w(e_2) \leq ... \leq w(e_m)$. $T^o = \phi$, $k = 1$.

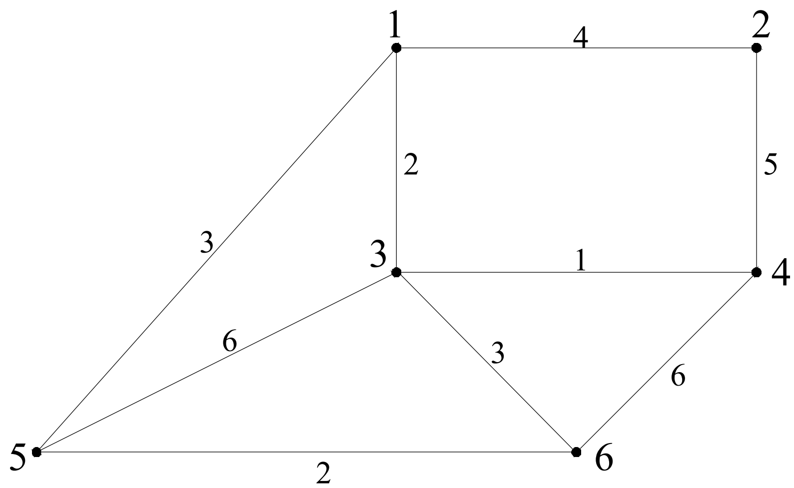
Passo 2. Se $H = (V, T^{k-1} \cup \{e_k\})$ é acíclico, então $T^k = T^{k-1} \cup \{e_k\}$. Caso contrário, $T^k = T^{k-1}$

Passo 3. Se $|T^k| = n - 1$, pare, (V, T^k) é uma árvore varredora mínima. Caso contrário, k = k+1 e vá ao passo 2.

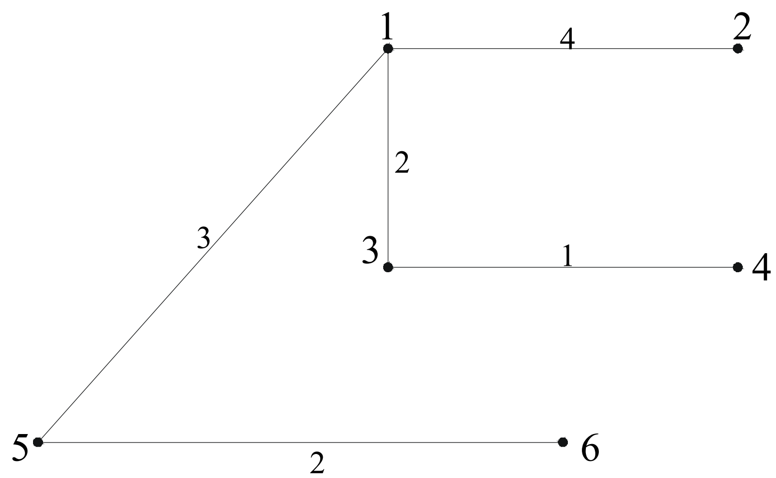
Nota : Este algoritmo guloso é ótimo .
Complexidade do algoritmo: O(m log m)

Exemplo

Seja o grafo G



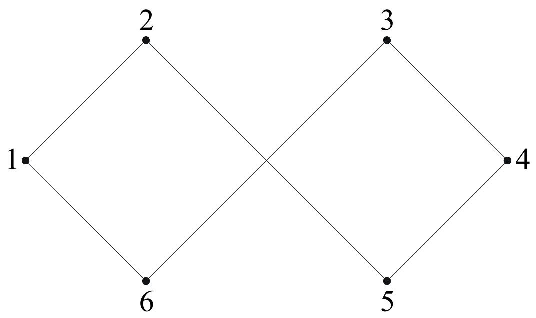
Árvore varredora mínima



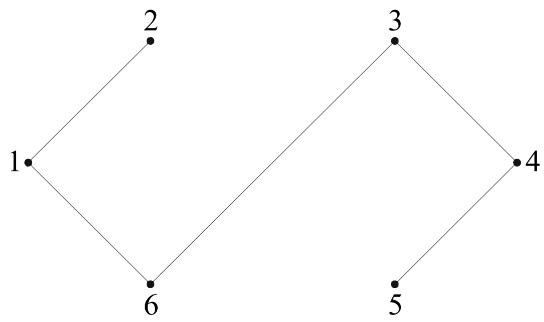
Heurísticas para o PCV Euclideano

Dado um ciclo Hamiltoniano do grafo G(V, E), obtém-se uma árvore varredora T de G ao se retirar qualquer aresta do ciclo Hamiltoniano.

Exemplo



Ciclo Hamiltoniano



Árvore Geradora

Conclusão : a árvore varredora mínima é um limitante inferior do comprimento ótimo do PCV

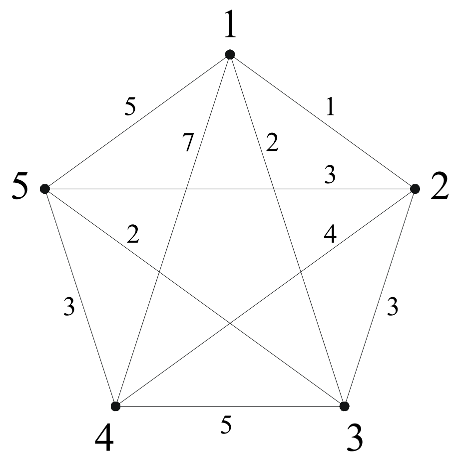
Heurística 1 : The Twice-Around Minimal Spanning Tree

Passo 1. Construa a árvore varredora mínima

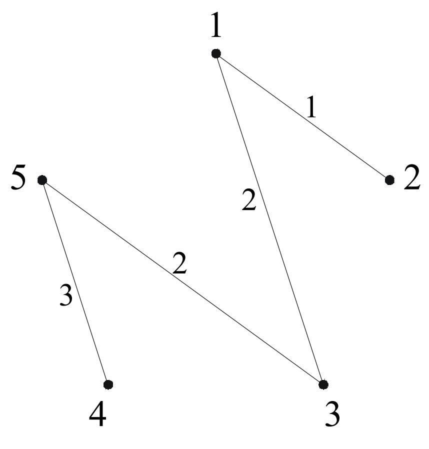
Passo 2. Duplique as arestas de modo a obter um ciclo Euleriano

Passo 3. Obtenha um ciclo Hamiltoniano a partir do ciclo Euleriano

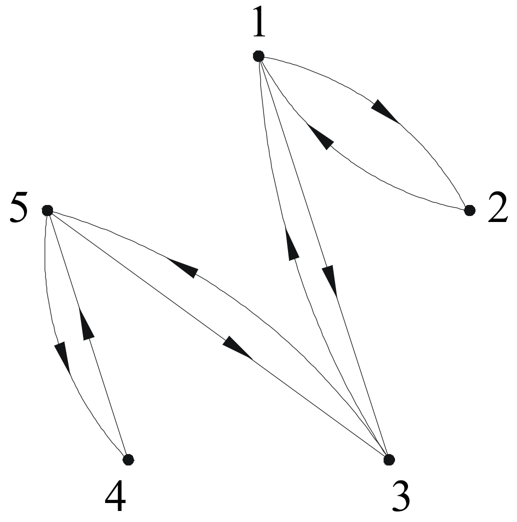
Exemplo



Passo 1. Árvore Varredora Mínima



Passo 2. Ciclo Euleriano



Ciclo: {1, 2, 1, 3, 5, 4, 5, 3, 1}

Passo 3.

Operação tomar atalho: menor caminho entre 2 pontos é a reta

a) Substitua as arestas (2, 1) e (1, 3) por (2, 3)