

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO EM OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

MÉTODOS ÓTIMOS

- Construção
- Branch and Bound
- Branch and Cut
- Programação Dinâmica
- Decomposição

MÉTODOS HEURÍSTICOS

- Heurísticas Construtivas
- Heurísticas Baseadas em Métodos Ótimos
- Heurísticas Lagrangeanas
- Heurísticas de Busca Local
- Metaheurísticas

AVALIAÇÃO DE HEURÍSTICAS

ANÁLISE EMPÍRICA

- Conjunto de instâncias geradas aleatoriamente
- Qualidade das soluções, usando medidas de valor médio, pior caso, desvio padrão, é comparada com:
 - i) Valor da solução ótima (só instâncias pequenas)
 - ii) Limitante inferior do valor da solução ótima no caso de minimização
 - iii) Resultados gerados por outras heurísticas

ANÁLISE PROBABILÍSTICA

- Envolve a especificação de função densidade de probabilidade para os parâmetros da instância
- Procura-se estabelecer propriedades probabilísticas da heurística tais como: probabilidade de obter uma solução dentro de uma certa porcentagem do ótimo

ANÁLISE DE PIOR CASO

- Estabelece o desvio máximo do valor da solução ótima
- Envolve também a construção de exemplos para os quais o desempenho da heurística é tão ruim quanto o desvio máximo

FUNDAMENTOS BÁSICOS

Referência: M.L. Fisher, Worst-Case Analysis of Heuristic Algorithms, Management Science, vol. 26, pp. 1-18, 1980.

Seja

P = conjunto de instâncias I de um problema

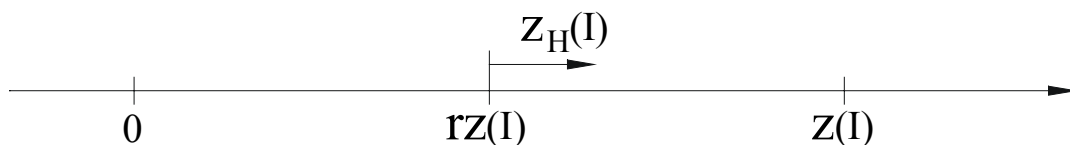
$z(I)$ = valor ótimo da instância I ; assumamos $z(I) \geq 0$

$z_H(I)$ = valor obtido pela heurística H quando aplicada à instância I .

- Problema de maximização

Mostre que para algum $0 \leq r \leq 1$

$$z_H(I) \geq r z(I) \quad , \quad \forall I \in P \quad (1)$$



- Problema de minimização

Mostre que para algum $r \geq 1$

$$z_H(I) \leq r z(I) \quad , \quad \forall I \in P \quad (2)$$



- Razão de desempenho de pior caso

Valor máximo de r tal que (1) é verdadeiro ou

Valor mínimo de r tal que (2) é verdadeiro

- Melhor valor de r

i) quando consegue-se achar uma instância I tal que $z_H(I) = r z(I)$ ou

ii) quando existe uma sequência infinita de instâncias tal que $z_H(I)/z(I)$ se aproxima de r

- Desvio relativo de pior caso ε

Forma equivalente de expressar desempenho de pior caso:

- i) Problema de maximização: $\varepsilon = 1 - r$

$$1 - \frac{z_H(I)}{z(I)} = \frac{z(I) - z_H(I)}{z(I)} \leq \varepsilon$$

- ii) Problema de minimização: $\varepsilon = r - 1$

$$\frac{z_H(I) - z(I)}{z(I)} \leq \varepsilon$$

HEURÍSTICAS CONSTRUTIVAS

- Constrõem uma solução passo a passo, onde em cada passo se adiciona componentes individuais: nós, arcos, variáveis, etc.
- Heurísticas gulosas: procuram em cada passo maximizar a melhoria local

Problema de mochila

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad z &= \sum_{j=1}^n v_j x_j \\ \text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq w \\ & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \end{aligned}$$

Assuma v_j e w_j inteiros positivos

- Heurística Gulosa

1. Ordene os itens tais que

$$\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{v_n}{w_n}$$

2. Faça $j = 1$ e $\bar{w} = w$

3. Faça $x_j = \min\left(1, \left\lfloor \frac{\bar{w}_j}{w_j} \right\rfloor\right)$ e $\bar{w} = \bar{w} - w_j x_j$

4. Pare se $j = n$ ou $\bar{w} = 0$. Caso contrário, faça $j = j + 1$ e vá para 2

Complexidade da heurística: $O(n \log n)$

Exemplo

$$w = 110$$

v_j / w_j já ordenado $\forall j$

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
v_j	11	21	31	33	43	53	55	65
w_j	1	11	21	23	33	43	45	55

	$x_1 = 1$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1$	$x_4 = 1$	$x_5 = 1$
\bar{b}	109	98	77	54	21

$$z_H = 11 + 21 + 31 + 33 + 43 = 139$$

Solução ótima: colocar os itens 1, 2, 3, 5, 6 na mochila

$$z = 159$$

- Análise de pior caso

Considere a série de exemplos

$$n = 2 ;$$

$$v_1 = w_1 = 1 ;$$

$$v_2 = w_2 = k , \quad k = 1, 2, \dots$$

$$w = k \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

Então

$$z_H = 1 \quad e \quad z = k$$

$$\frac{z_H}{z} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Neste caso, diz-se que a heurística é arbitrariamente ruim

PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE (PCV) EUCLIDEANO

É um problema simétrico ($c_{ij} = c_{ji}$) com

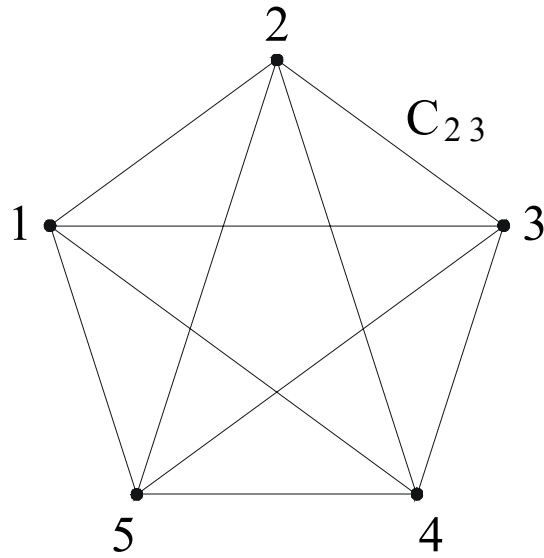
$$c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik} \quad \forall i, j, k$$

Considere o PCV Euclideano no grafo completo $G(V, E)$

V : nós do grafo G

E : arestas do grafo G

Referência: D.J. Rosenkrantz, R.E. Stearns, P.M. Lewis II, An Analsis of Several Heuristics for the Traveling Salesman Problem, SIAM Journal on Computing, vol. 6, pp. 563-581, 1977.



Seja

L : comprimento do tour

H : sequência de cidades

Considere a matriz simétrica de distâncias D da instância

$$D = \begin{bmatrix} - & 1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & - & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & - & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & - & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & - \end{bmatrix}$$

HEURÍSTICA 1 : VIZINHO MAIS PRÓXIMO

- Escolha uma cidade k qualquer inicial e a cada iteração escolha a cidade mais próxima
- Cidade inicial $k = 1$

Iteração 1 : $L = 1$; $H = \{1, 2\}$

Iteração 2 : $L = 4$; $H = \{1, 2, 5\}$

Iteração 3 : $L = 6$; $H = \{1, 2, 5, 3\}$

Iteração 4 : $L = 7$; $H = \{1, 2, 5, 3, 4\}$

Iteração 5 : $L = 14$; $H = \{1, 2, 5, 3, 4, 1\}$

- Complexidade : $O(n^2)$
- Solução obtida depende fortemente da cidade inicial.
Aplica-se a heurística partindo de cada cidade inicial diferente e escolhe-se a melhor solução

- Pior caso : $z_H / z \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lceil \log_2(n) \rceil$

HEURÍSTICA 2 : INSERÇÃO MAIS PRÓXIMA

- a) Inicie com um ciclo com 3 arestas
- b) Encontre a cidade k não pertencente ao ciclo, mais próxima de qualquer cidade do ciclo.

- c) Encontre uma aresta (i, j) do ciclo que minimize

$$\{c_{ik} + c_{kj} - c_{ij}\}$$

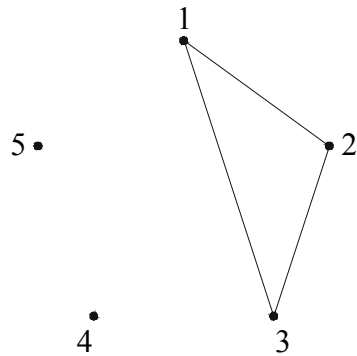
- d) Insira a cidade k entre i e j . Forme um novo ciclo e retorne a b)

Complexidade: $O(n^2)$

Pior caso: $\frac{Z_H}{Z} < 2$

- Ciclo inicial {1, 2, 3, 1}

Iteração 1



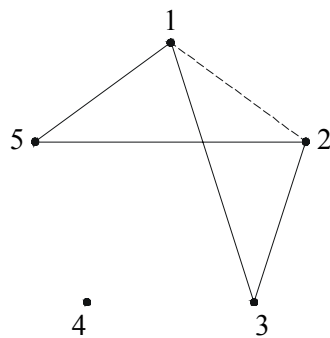
Cidade mais próxima do ciclo: 5

$$H = \{1, 2, 3, 1\}$$



3 inserções possíveis

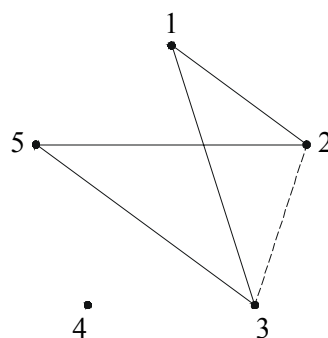
Inserção 1



$$c_{15} + c_{52} - c_{12} =$$

$$5 + 3 - 1 = 7$$

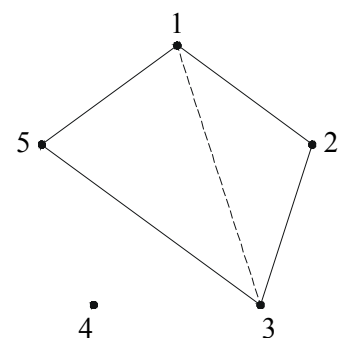
Inserção 2



$$c_{25} + c_{53} - c_{23} =$$

$$3 + 2 - 3 = 2$$

Inserção 3



$$c_{15} + c_{53} - c_{13} =$$

$$5 + 2 - 2 = 5$$

- Insira a cidade 5 entre as cidades 2 e 3

$$L = 8$$

$$H = \{1, 2, 5, 3, 1\}$$

Iteração 2

$$H = \{1, 2, 5, 3, 1\}$$

↑ ↑ ↑ ↑

4 inserções possíveis

$$\text{Inserção 1 : } H_1 = \{1, 4, 2, 5, 3, 1\}$$

$$c_{14} + c_{42} - c_{12} = 7 + 4 - 1 = 10$$

$$\text{Inserção 2 : } H_2 = \{1, 2, 4, 5, 3, 1\}$$

$$c_{24} + c_{45} - c_{15} = 3 + 4 - 3 = 4$$

$$\text{Inserção 3 : } H_3 = \{1, 2, 5, 4, 3, 1\}$$

$$c_{54} + c_{43} - c_{53} = 3 + 5 - 2 = 6$$

$$\text{Inserção 4 : } H_4 = \{1, 2, 5, 3, 4, 1\}$$

$$c_{34} + c_{41} - c_{31} = 7 + 5 - 3 = 9$$

- Insira a cidade 4 entre as cidades 2 e 5

$$L = 12 \quad H = \{1, 2, 4, 5, 3, 1\}$$

HEURÍSTICA 3 : INSERÇÃO MAIS DISTANTE

Idêntica à heurística 2, exceto no passo b) onde se escolhe a cidade k não pertencente ao ciclo, mais distante de qualquer cidade do ciclo

Complexidade: $O(n^2)$

Pior caso: $\frac{Z_H}{Z} \leq 2 \log_2 n + 0,16$

Empiricamente, a heurística 3 mostra-se superior às heurísticas 1 e 2.

HEURÍSTICAS BASEADAS EM MÉTODOS ÓTIMOS

Considere um grafo $G(V, E)$:

$V = \{1, 2, \dots, n\}$: conjunto de nós

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$: conjunto de arestas

EXEMPLO

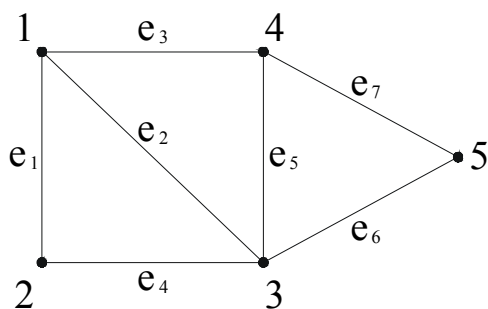


Figura 1

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{e_1 = (1,2), e_2 = (1,3), e_3 = (1,4), \\ e_4 = (2,3), e_5 = (4,3), \\ e_6 = (3,5), e_7 = (4,5)\}$$

DEFINIÇÕES

- Uma aresta e_i é incidente em $v \in V$ se $v \in e_i$.
- Uma sequência de nós distintos v_0, v_1, \dots, v_k de um grafo é chamado caminho (path) se $(v_{i-1}, v_i) \in E$ $i = 1, 2, \dots, k$.
- Um ciclo é um caminho com $v_0 = v_k$ e $k \geq 3$.

- Um grafo G é conexo se existe um caminho entre cada par de nós de G .
- Um ciclo que passa por todos os nós de um grafo é chamado de ciclo Hamiltoniano.
- Um ciclo que contém cada aresta de um grafo exatamente uma vez é chamado de ciclo Euleriano.
- Grau de um nó i é o número de arestas incidentes em i .

EXEMPLO

- a) $1 - 2 - 3 - 5 - 4$: ciclo Hamiltoniano na Figura 1
- b) o grafo da Figura 1 não possui ciclo Euleriano