PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Conjunto de cidades $V = \{1, \ldots, n\}$

c_{ij} : "distância" entre a cidade i e a cidade j

problema simétrico : $c_{ij} = c_{ji}$

problema assimétrico : $c_{ij} \neq c_{ji}$

Problema : encontre uma rota (tour) que comece pela cidade 1, passe por cada cidade somente uma vez e então retorne à cidade 1 com distância mínima.

Número de soluções

problema assimétrico : $(n-1)!$

problema simétrico : $(n-1)!/2$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se j sucede imediatamente} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições

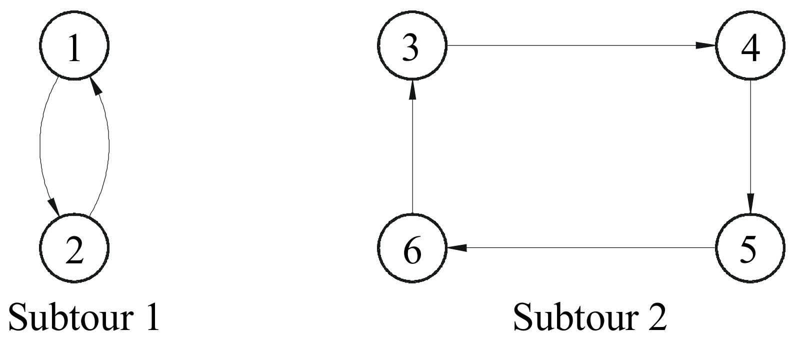
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j \in V \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i \in V \tag{2}$$

Restrições (1) e (2) podem ser satisfeitas por subtours

Exemplo

$$n = 6 \quad ; \quad x_{12} = x_{21} = x_{34} = x_{45} = x_{56} = x_{63} = 1$$



Um subtour existe se e somente se para um conjunto $U \subset V$ com $2 \leq |U| \leq |V| - 2$

$$\sum_{i \in U, j \in V-U} x_{ij} = 0$$

ou

$$\sum_{i \in U, j \in U} x_{ij} > |U| - 1$$

Para eliminar subtours impõe-se

$$\sum_{i \in U, j \in V-U} x_{ij} \geq 1 \qquad 2 \leq |U| \leq |V| - 2 \tag{3}$$

ou

$$\sum_{i \in U, j \in U} x_{ij} \leq |U| - 1 \qquad 2 \leq |U| \leq |V| - 2 \tag{4}$$

Exemplo

Subtours 1 e 2 são impedidos pelas restrições

$$x_{12} + x_{21} \leq 1$$

$$x_{34} + x_{45} + x_{56} + x_{63} \leq 3$$

Formulação

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.a

(1), (2), (3) ou (4)

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j$$

MODELAGEM COM VARIÁVEIS BINÁRIAS III: RESTRIÇÕES DISJUNTIVAS

PROBLEMA DA PROGRAMAÇÃO (SCHEDULING) DE OPERAÇÕES EM JOB SHOP

- n tarefas (jobs) e m máquinas
- cada tarefa é composta de m operações; cada operação executada em máquina distinta
- ordenamento ou roteamento de cada tarefa i nas máquinas é dado: i(1), i(2), …, i(m)
- uma máquina pode processar somente uma operação por vez e toda operação deve ser completada
- p_{ij} : tempo de processamento da tarefa i na máquina j

Problema : encontre um programa de operações que minimize o tempo total de processamento das tarefas (makespan).

Exemplo

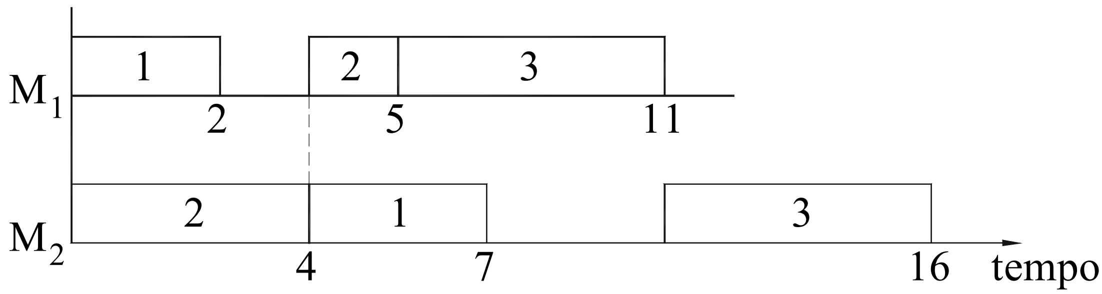
<u>Tempos de Processamento</u>

		Máquina	
		M_1	M_2
	1	2	3
Tarefa	2	1	4
	3	6	5

<u>Roteamento</u>

		Máquina	
	1	M_1	M_2
Tarefa	2	M_2	M_1
	3	M_1	M_2

REPRESENTAÇÃO EM DIAGRAMA DE GANTT DE UM PROGRAMA FACTÍVEL



Makespan = 16

Restrições

Seja

C_{ij} = instante de término da tarefa i na máquina j

$$y_{ivj} = \begin{cases} 1 & \text{se a tarefa i precede a tarefa v na máquina} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$C_{i,i(r+1)} \geq C_{i,i(r)} + p_{i,i(r+1)} \qquad r=1,\ldots,m-1; \quad j=1,\ldots,m \qquad (1)$$

$$C_{vj} \geq C_{ij} + p_{vj} \qquad \text{se} \qquad y_{ivj} = 1 \qquad (2a)$$

ou

$$C_{ij} \geq C_{vj} + p_{ij} \qquad \text{se} \qquad y_{ivj} = 0 \qquad (2b)$$

Seja M um número grande

Restrições Disjuntivas

$$C_{vj} - C_{ij} \geq p_{vj} - M(1 - y_{ivj}) \qquad (3)$$

$$C_{ij} - C_{vj} \geq p_{ij} - M\, y_{ivj} \qquad (4)$$

para $i = 1, \ldots, n$; $v = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$

Se $y_{ivj} = 1$

- restrição (3) reduz-se à restrição (2a)
- restrição (4) fica inativa: $C_{ij} - C_{vj} \geq p_{ij} - M$

<u>Formulação</u>

$$\min \sum_{i=1}^{n} C_{i,i(m)}$$

s.a

$$(1),\ (3),\ (4)$$

$$C_{ij} \geq 0 \quad \text{e} \quad y_{ivj} \in \{0,1\} \quad \forall i,v,j$$

PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DO ATRASO TOTAL EM UMA MÁQUINA COM TEMPOS DE PREPARAÇÃO DEPENDENTES DA SEQUÊNCIA

p_j : tempo de processamento da tarefa j

s_{ij} : tempo de preparação da máquina entre o fim do processamento da tarefa i e início da tarefa j

C_j : instante de término da tarefa j (variável)

$T_j = \max\{0,\ C_j - d_j\}$ = atraso da tarefa j (variável)

Problema : encontre um programa (sequência) que minimize a soma dos atrasos das tarefas.

Seja a variável

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se j sucede i imediatamente} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considere uma tarefa fictícia (zero) para representar a primeira e a última tarefa na sequência.

Exemplo

Seja a sequência com 4 tarefas

$$0 - 2 - 1 - 4 - 3 - 0$$

$$x_{02} = x_{21} = x_{14} = x_{43} = x_{30} = 1$$

Formulação

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} T_j$$

s.a

$$\sum_{i=0, i \neq j}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j=0,\ldots,n$$

$$\sum_{j=0, j \neq i}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i=0,\ldots,n$$

$$C_j \geq C_i - M + (s_{ij} + p_j + M)x_{ij} \qquad i, j=1,\ldots,n$$

$$T_j \geq C_j - d_j \qquad j=1,\ldots,n$$

$$C_j \geq 0, \quad T_j \geq 0 \qquad j=1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i, j=0,1,\ldots,n$$